ASSOCIAZIONE ITALIANA FINANCIAL RISK MANAGEMENT

Un'introduzione all'analisi Monte Carlo in Finanza

Stefano Fabi

Working Paper, 12/01/98

Presidenza: Fernando Metelli - Banca Popolare di Milano, Via Fara n°41, 20100 Milano, ITALY
Tel. +39 02 77007693; fax. +39 02 77004409; e-mail: metellif@tin.it. URL: http://www.aifirm.com
sezione Working Papers, responsabile operativo Cattarozzi Gabriele – Banca Popolare di Ancona, e-mail: finanza.studi@bpa.it.

L'analisi Monte Carlo viene utilizzata in numerosi settori della fisica, della matematica e nell'ingegneria quando il problema non è trattabile se non tramite un'approssimazione numerica.
In questo documento cercheremo di presentare un'introduzione all'uso del metodo Monte Carlo in finanza applicandolo alla determinazione del fair value di una currency option.

Introduzione

Sappiamo tutti calcolare l'area di un rettangolo, ne misuriamo la lunghezza, l'altezza e moltiplichiamo le due misure. Nell'esempio della figura che segue l'area del rettangolo sarà 6*9=54 cm^2.
Supponiamo ora di delimitare una superficie chiusa irregolare all'interno di questo rettangolo. Come possiamo calcolarne l'area ?.
Poichè non è possibile determinarla con una semplice espressione, come nel caso dell'area del rettangolo, dobbiamo ricorrere a metodi alternativi.
Un primo metodo potrebbe consistere nel ritagliare la figura delimitando dapprima il rettangolo. Potremmo poi pesare il frammento di carta rettangolare. Potremmo ritagliare e pesare infine il cartoncino relativo all'area irregolare. L'area cercata sarà approssimativamente

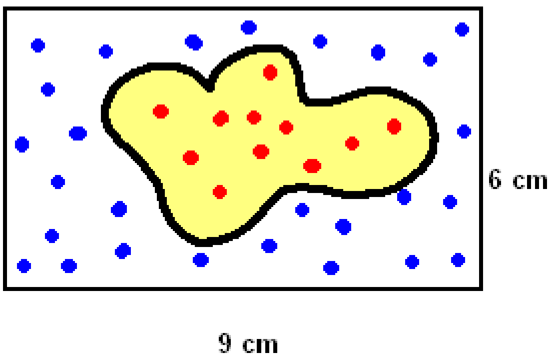
$$AreaIrregolare = Area\,\mathrm{Re}\,t\tan golo * \frac{PesoCartoncinoAreaIrregolare}{PesoCartoncino\,\mathrm{Re}\,t\tan golo}$$

Un metodo alternativo consiste nel tracciare un numero elevato di punti sul disegno distribuendoli uniformemente e contare quanti sono caduti all'interno della superficie irregolare. Se il numero dei punti sarà elevato e la loro distribuzione uniforme allora l'area sarà approssimativamente

$$AreaIrregolare = Area\,\mathrm{Re}\,t\tan golo * \frac{PuntiAll'InternoDell'AreaIrregolare}{NumeroComplessivoDiPunti}$$

Nell'esempio di figura

$$AreaIrregolare = 54cm^2 * \frac{11}{38} = 15.6cm^2$$



Abbiamo realizzato la nostra prima simulazione Monte Carlo applicata ad un problema di calcolo di aree, ovvero di integrazione.

L'analisi Monte Carlo ed il "lancio di un dado".

Prima di affrontare il problema del fair value dell'opzione in cambi considereremo un più semplice caso, il lancio di un dado.

Supponiamo di voler determinare il corretto *prezzo* da corrispondere per la partecipazione ad una lotteria che consista in un singolo lancio di un dado a 6 facce.
Supponiamo che, a fronte del lancio del dado, venga riconosciuto un premio di 1 Lira nel caso sia estratto il numero 1, 2 Lire nel caso di uscita del numero 2 .. e così via fino a 6 Lire in caso di estrazione del numero 6.
Ci poniamo il problema di determinare il **fair value** per la partecipazione, che renda equo il gioco.
Vedremo come, analogamente a quanto verrà esaminato nel caso della currency option, il problema può essere risolto con una **soluzione analitica** oppure in via **numerica**, tramite una simulazione.

La soluzione analitica.

La soluzione analitica consiste anzitutto nell'adozione di un modello, consistente con l'osservazione del fenomeno. Nel nostro modello assumeremo che la probabilità associata all'estrazione di una qualsiasi faccia del dado sia la medesima, ovvero che una volta su sei possa uscire il numero 1, una volta su sei il 2 e così via.

Il valore medio dei lanci sarà

$$1*\frac{1}{6}+2*\frac{1}{6}+3*\frac{1}{6}+4*\frac{1}{6}+5*\frac{1}{6}*6*\frac{1}{6}=(1+2+3+4+5+6)*\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=3.5$$

Possiamo generalizzare la formula per un dado che sia costituito di n facce.
Sappiamo infatti che la progressione aritmetica

$$1+2+3+\ldots n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Il fair value relativo al gioco del lancio del dado risulta quindi

$$FairValue=\frac{n(n+1)}{2n}=\frac{n+1}{2}$$

Nel caso del lancio di un dado a 6 facce il fair value sarà dunque 3.5.
Abbiamo dunque determinato *una soluzione in forma chiusa* per il problema, che non solo è in grado di fornirci quanto desiderato, ma anche informazioni aggiuntive. Ad esempio derivando l'equazione precedente possiamo capire come varia il fair value al variare del numero delle facce del dado lanciato.

$$\frac{\Delta FairValue}{\Delta n}=\frac{1}{2}$$

Passando da un dado a 6 facce ad un dado ad 8 facce il fair value si incrementera' solo di (8-6)/2=1 ovvero diventerà 3.5+1=4.5.
Tale procedimento è il medesimo che ci consente, ad esempio, di determinare il δ di un'opzione derivando l'equazione di Black & Sholes.

La simulazione monte carlo.

L'approccio alternativo al problema consiste nell'analizzare una successione di lanci "generati" da un computer e scelti in modo che la distribuzione di probabilità di ogni lancio sia in accordo con il modello prescelto, ovvero ogni valore sia equiprobabile.
Il sistema di calcolo è basato su Excel ed un opportuno programma che semplifica l'iterazione ed il calcolo della media. Excel mette infatti a disposizione la funzione RAND() che restituisce un numero uniformemente distribuito tra 0 ed 1.
La figura mostra che la media di 20000 lanci simulati è per l'appunto 3.5.

Statistica	*Valore*
Numero di tentativi	20.000
Media	3,50
Deviazione Standard	1,70
Varianza	2,91

L'analisi Monte Carlo applicata alla valutazione di una Currency Option.

L'esempio esposto precedentemente è introduttivo all'esposizione di un caso concreto, la valutazione di una currency option di cui riportiamo in tabella i dati del contratto.
L'esempio e' tratto dal testo di John Hull, Introduzione ai mercati dei futures e delle opzioni.

CALL		GBP
PUT		USD
Spot		1.6
Strike		1.6
rate USD	r_d	8%
rate GBP	r_f	11%
Volatilità	σ	14.1%
Expiry	T-t	0.3333

I tassi indicati in tabella sono già espressi in capitalizzazione continua.

La soluzione analitica.

Il fair value dell'opzione è dato dal suo valore atteso. Concettualmente si ottiene attualizzando ai tassi risk free la somma di tutti i possibili valori che l'opzione puo' assumere a scadenza ognuno moltiplicato per la probabilità che esso si verifichi.

La nota equazione di Black/Scholes, nella sua variante per le currency option, ci indica il fair value per una opzione call.

$$c = Se^{-r_f (T-t)} N(d_1) - Xe^{-r_d (T-t)} N(d_2)$$

dove

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r_d - r_f + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{(T - t)}$

L’equazione è facilmente impostabile su di un foglio elettronico, occorre solo ricordare che

- I tassi sono espressi in regime di capitalizzazione continua.[1]
- la volatilità è quella annualizzata relativa al periodo
- N rappresenta la Distribuzione Normale Cumulata Standard che su Excel viene calcolata dalla funzione NORMSDIST ()

Il foglio EXCEL che realizza il calcolo e’

Call	GBP
Put	USD
Spot	1.6
Strike	1.6
r usd	8%
r gbp	11%
vol	14.1%
T-t	0.3333
d1	-0.08214
d2	-0.16354
c	**0.043**

La simulazione Monte Carlo.

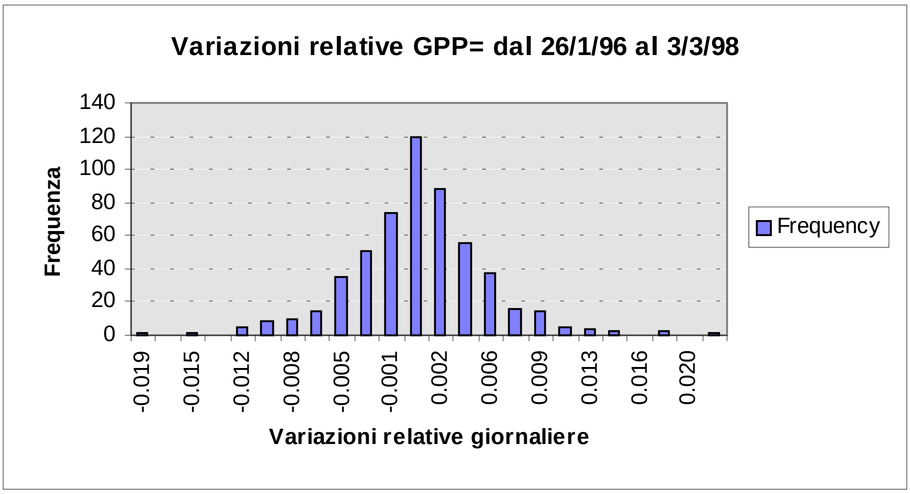
Per effettuare una simulazione Monte Carlo dobbiamo anzitutto definire un modello che ci permetta di simulare il movimento dei prezzi di mercato.

Il modello che è anche alla base della formulazione di Black/Scholes prevede che i prezzi seguano un random walk con drift, ovvero che la variazione percentuale che il prezzo puo’ assumere in un tempo infinitesimo abbia una componente deterministica, determinata dal rapporto tra i tassi di interesse ed una componente probabilistica.

$\frac{dP}{P} = \mu dt + \sigma dz$ dove $dz = N\sqrt{dt}$

La reale distribuzione del rapporto di cambio GBP/USD mostra come l’approssimare le variazioni relative dei prezzi secondo una distribuzione normale sia in accordo con le osservazioni.

[1] Se gli interessi vengono capitalizzati m volte l’anno, il montante dopo n anni di un capitale A sarà $M = A\left(1 + \frac{R_{composto}}{m}\right)^{mn}$ se passiamo al limite $\lim_{m\to\infty} A\left(1 + \frac{R_{composto}}{m}\right)^{mn} = Ae^{R_{continuo}n}$ da cui l’equivalenza $Ae^{R_{continuo}n} = A\left(1 + \frac{R_{composto}}{m}\right)^{mn}$ da cui $R_{continuo} = m\ln\left(1 + \frac{R_{composto}}{m}\right)$



Prescindendo dalle derivazioni formali possiamo comunque determinare una modalità per determinare prezzi futuri che siano distribuiti, dal punto di vista statistico, in accordo al modello.

(1) $S_T = S_t * e^{\left(r_d - r_f - \sigma^2/2\right)(T-t) + \sigma\sqrt{(T-t)}Z}$

L'equazione precedente nel caso limite di $\sigma = 0$, ci fornisce il prezzo forward al tempo *(T-t)* nel caso di tassi espressi nel continuo.

$$S_T = S_t * e^{\left(r_d - r_f\right)(T-t)}$$

Per effettuare la simulazione Monte Carlo occorre

- generare un numero elevato di prezzi S_T utilizzando l'equazione (1). Questo viene effettuato generando numeri casuali distribuiti in accordo alla distribuzione normale standardizzata. Infatti nell'equazione (1) $Z \approx N(0,1)$. Per la generazione dei numeri casuali possono essere utilizzate le funzioni standard di EXCEL, *=NORMINV(RAND(),media,deviazione standard*), oppure opportuni add-in.
- valutare per ogni prezzo il valore dell'opzione all'expiry.
- attualizzare il risultato utilizzando i tassi risk free ed effettuarne la media.

Il foglio Excel che segue riporta il calcolo effettuato per uno dei possibili prezzi S_T, calcolati da uno dei possibili valori di Z.
E' necessario ora effettuare nuovamente il calcolo generando nuovi valori possibili per il prezzo all'expiry e calcolarne la media.

Call	GBP
Put	USD
Spot	1.6
Strike	1.6
r usd	8%
r gbp	11%
vol	14.1%
T-t	0.3333
d1	-0.08214
d2	-0.16354
c	0.043
Z	1.447651
S(T)	1.77631
PayOut	0.17631
NPV	0.17808

La tabella che segue riporta il risultato relativo a 1000 iterazioni.

Statistica	***Valore***
Numero di tentativi	1.000
Media	0,043
Deviazione Standard	0,070
Varianza	0.005

Il risultato 0.043 e' in accordo con il risultato analitico.

Conclusioni

Il metodo Monte Carlo e' in grado di fornirci un semplice strumento addizionale per il pricing di numerosi strumenti finanziari anche data la disponibiltà di add-in per fogli elettronici in grado di semplificare il processo di iterazione.
Occorre peraltro tener conto che il risultato è dipendente dal numero di iterazioni e dalla "qualità" del processo di generazione dei numeri casuali necessari a simulare la componente non deterministica del processo stocastico.
Tra i prodotti commerciali su Excel possiamo citare

@RISK di Palisade	www.palisade.com
Crystal Ball di Decisioneering	www.decisioneering.com

Tra i prodotti freeware

SIMTOOLS http://www.kellogg.nwu.edu/faculty/myerson/ftp/addins.htm

Bologna, 1998
Stefano Fabi
fbae11k1@bo.nettuno.it